Exercices et problèmes

1 Déterminer pour chacun des entiers a ci-dessous, l'ensemble D_a de tous ses diviseurs.
$a=-13$; $a=-57$; $a=205$.

2 Le nombre -35763 est-il un multiple de 3 ? de 11 ? de 7 ?

3 1. Déterminer l'ensemble des diviseurs de 15.
2. Déterminer tous les couples d'entiers (a,b) tels que $a^2-b^2=15$.

4 Déterminer tous les entiers n tels que n divise $n+5$.

5 Déterminer tous les entiers n tels que $n-2$ divise $n-9$.

6 Soit un entier $n\geq 0$.
Montrer que $3^{2n}-2^n$ est un multiple de 7.

7 1. Ecrire la division euclidienne 3171 par 19.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3171 par -19.

8 Déterminer le reste de la division euclidienne de -307 par -7.

9 Déterminer, dans chacun des cas ci-dessous, le quotient et le reste de la division de a par b.
1. $a=1345791113$ et $b=246812$.
2. $a=-1345791113$ et $b=246812$.
3. $a=1345791113$ et $b=-246812$.
4. $a=-1345791113$ et $b=-246812$.

10 Soit le polynôme
$P(x)=x^4-32x^3+186x^2-280x+125$.

1. Montrer que si n est un entier tel que $P(n)=0$, alors n divise 125.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$.

11 Soit deux entiers non nuls a et b.
On désigne respectivement par q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
Dans chacun des cas, déterminer, si possible a et b.
1. $a+b=44$, $q=6$ et $r=2$.
2. $a+b=-49$, $q=-13$ et $r=11$.
3. $a+b=42$, $q=-6$ et $r=9$.

12 Déterminer les restes modulo 9 de -1, 10, -10, -27 et -25.

13 Déterminer les entiers n dans chacun des cas ci-dessous.
a. $n\equiv -2\ (\mathrm{mod}\ 7)$ et $-10\leq n\leq 15$.
b. $n\equiv 6\ (\mathrm{mod}\ 11)$ et $-6\leq n\leq 20$.

14 1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1, non divisible par 3.
Montrer que $n+1$ ou $n-1$ est divisible par 3.
2. Soit n et p deux entiers naturels, montrer que l'un des entiers n , p , $n-p$ ou $n+p$ est divisible par 3.

15 Soit deux entiers a et b tels que $a\equiv 3\ (\mathrm{mod}15)$ et $b\equiv 11\ (\mathrm{mod}15)$.
Déterminer les restes modulo 15 de
$a+b$, $a-b$, $-a$, ab, $-a^2b$ et ab^2.

16 Soit trois entiers a, b et c tels que
$a\equiv 2\ (\mathrm{mod}17)$, $b\equiv 4\ (\mathrm{mod}17)$ et $c\equiv 5\ (\mathrm{mod}17)$.
Déterminer les restes modulo 17 de
$a+bc$ et $a^2+b^2+c^2$.